Mécanismes

Vitesses et accélération - Lois entrée/sortie

TD9

Cinématique du contact

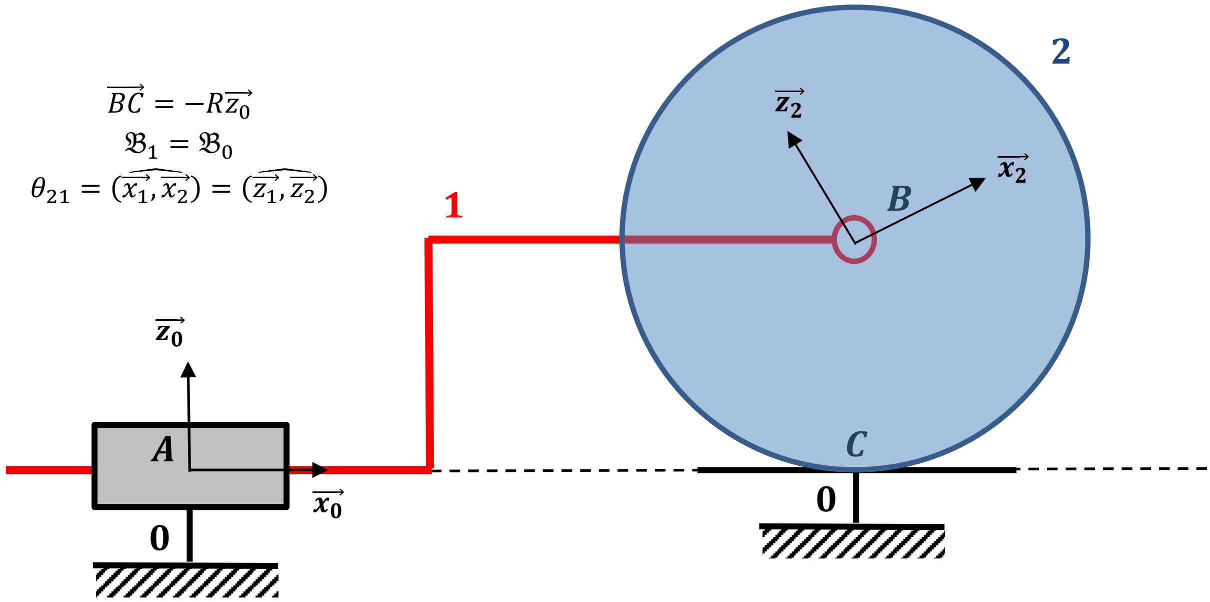
Programme - Compétences		
B211	MODELISER	Torseur cinématique
B214	MODELISER	Liaisons: - géométrie des contacts entre deux solides - définition du contact ponctuel entre deux solides: roulement, pivotement, glissement, condition cinématique de maintien du contact
C26	RESOUDRE	Composition des vitesses angulaires Composition des vitesses

Cinématique du contact

Exercice 1: Banc d'essai de roulement

On s'intéresse dans cette étude à un banc d'essai de roulement et de glissement dont le schéma cinématique est proposé ci-dessous :

$$\overrightarrow{BC} = -R\overrightarrow{z_0}$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_0$$
$$\theta_{21} = \widehat{(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})} = \widehat{(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})}$$



Il est possible de motoriser la liaison glissière $1/0$ et la liaison pivot $2/1$.

Roulement sans glissement

Question 1: Déterminer la relation liant la vitesse de rotation Ω_{21} et la vitesse dans la glissière V_{10} dans le cas où il y a roulement sans glissement en C

On impose une vitesse dans la glissière V_{10} et on laisse libre la liaison pivot $2/1$ en B.

$$R = 50\ cm$$

Question 2: Déterminer la valeur de la vitesse de rotation Ω_{21} pour $V_{10} = 1\ m.s^{-1}$

Vitesse de glissement

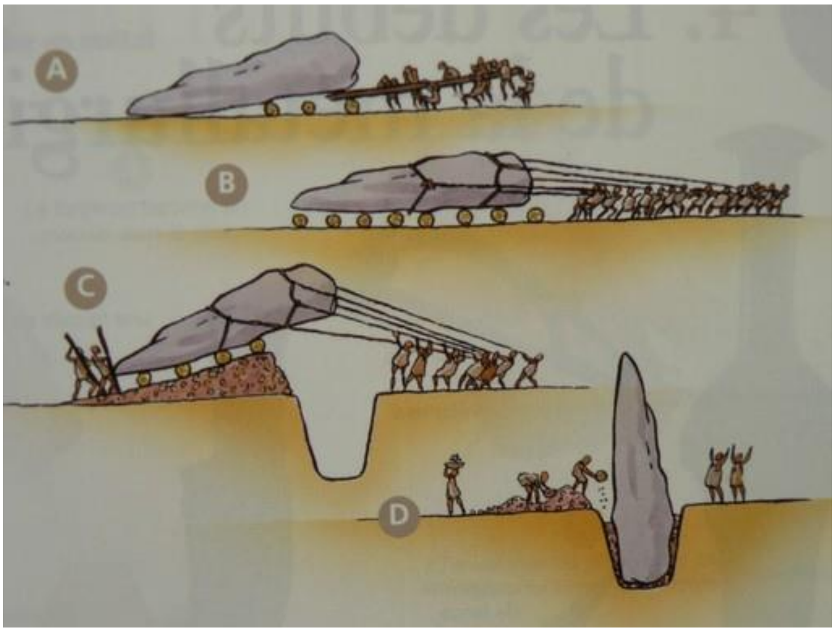
On motorise la liaison pivot $2/1$ en B et on impose une vitesse de rotation Ω_{21} en parallèle de la vitesse dans la glissière V_{10}.

Question 3: Déterminer l'expression littérale de la vitesse de glissement V_G en C

Question 4: Application numérique : $V_{10} = 1\ m.s^{-1}$ et $\Omega_{21} = 10\ tr.min^{-1}$

Exercice 2: Transport de menhirs

Le transport était (à priori) réalisé en utilisant des rondins de bois permettant de faire rouler le menhir sur ceux-ci dans le but de s'affranchir des frottements du menhir sur le sol :



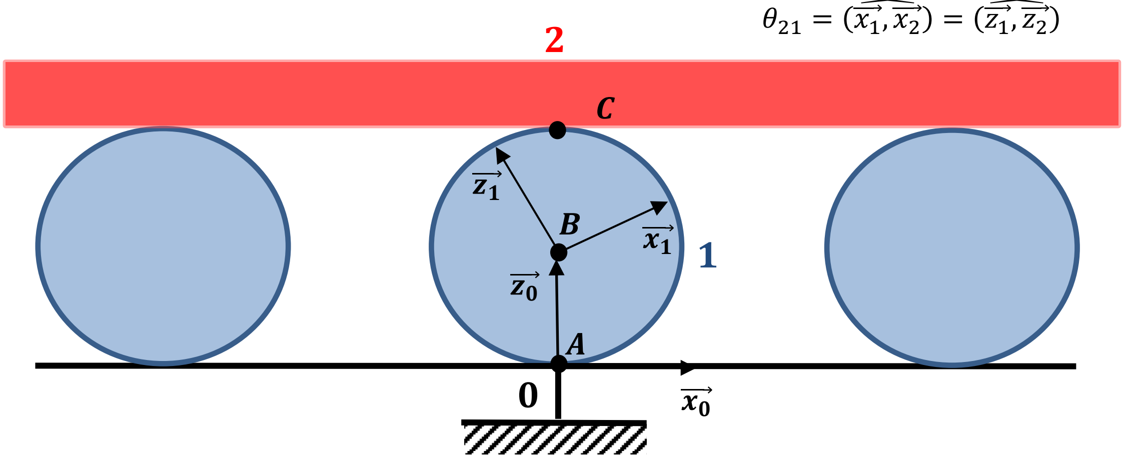
On propose de s'intéresser au mouvement de l'un de ces rondins en supposant qu'au contact du rondin avec le sol d'une part et avec le menhir d'autre part, il y a roulement sans glissement.

On propose le modèle suivant :

$\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{z_0}$

$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_0$

$\theta_{21} = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}})$



On suppose $\Omega_{10} > 0$. Les rondins sont assimilés à des cylindres parfaits de rayons R et de diamètres $D = 30cm$.

Question 1: En exploitant la propriété de roulement sans glissement en A, exprimer la vitesse $\vec{V}(B,1/0)$ en fonction de R, Ω_{10} et d'un vecteur donné

Question 2: De même, exprimer $\vec{V}(C,1/0)$ en fonction de Ω_{10}, R et d'un vecteur donné

Question 3: Dans quelle direction se déplace le menhir ?

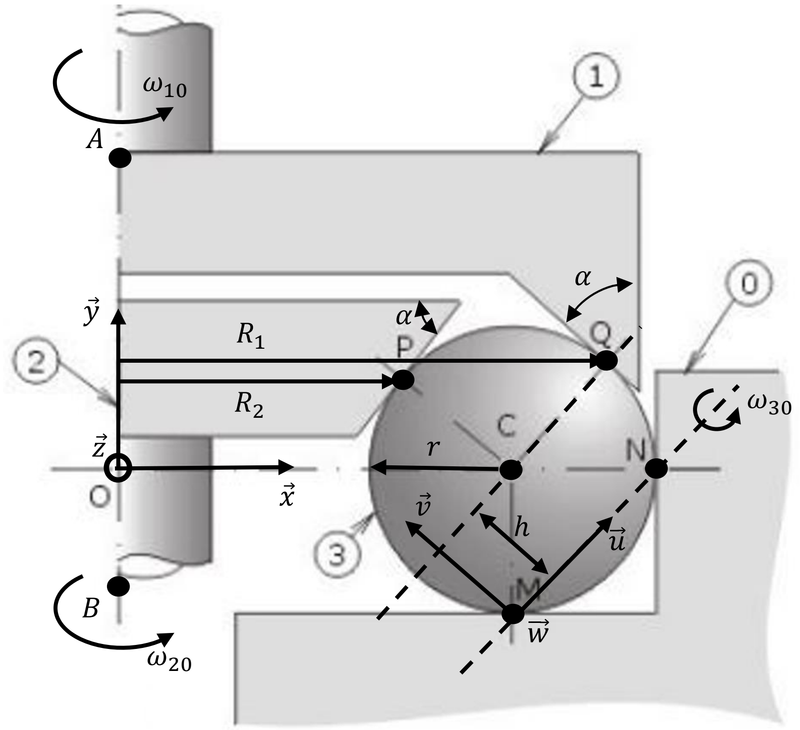
Question 4: En exploitant la propriété de roulement sans glissement en C, exprimer $\vec{V}(C,2/0)$ en fonction de Ω_{10}, R et d'un vecteur donné

La vitesse de déplacement des rondins sera assimilée à la vitesse de leur centre de gravité B, c'est-à-dire la vitesse de déplacement global « vu de loin » des rondins.

Question 5: En déduire le rapport entre les vitesses de déplacement du rondin V_R et du menhir V_M

Remarque : au-delà de ce problème de rondins, cette étude s'étend aux roulements à billes et surtout, aux guidages linéaires à billes nécessitant une recirculation de celle-ci pour permettre des courses importantes.

Exercice 3: Réducteur à billes



On suppose roulement sans glissement aux 4 contacts en M,N P et Q.
$(A, \vec{y})$ est l'axe de rotation de 1 par rapport à 0 et $(B, \vec{y})$ est l'axe de rotation de 2 par rapport à 0.

On pose : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|}$. On définit la base $\mathfrak{B}'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ comme proposée sur le schéma.

On donne l'angle $\alpha = 45°$.

On définit la base $\mathfrak{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à l'instant de la photo ci-dessus. En effet, cette base tourne, mais les relations obtenues dans le plan représenté seront vraies quelle que soit la position des billes.

Question 1: Exprimer h en fonction de r

Question 2: Exprimer $\vec{V}(Q,1/0)$ en fonction de R_1 et $\dot{\theta}_{10}$

Question 3: Exprimer $\vec{V}(P,2/0)$ en fonction de R_2 et $\dot{\theta}_{20}$

Question 4: Exprimer les relations de roulement sans glissement en M et N

On pose $\overrightarrow{\Omega_{30}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}'}$ et $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}'}$ $avec\ L > 0$.

Question 5: Montrer que $\beta = \gamma = 0$

On pose donc : $\overrightarrow{\Omega_{30}} = \dot{\theta}_{30}\vec{u}$

Question 6: Montrer que $\forall P \in (MN), \vec{V}(P,3/0) = \vec{0}$

On en déduit que l'axe de rotation de 3 par rapport à 0 est l'axe $(M, \vec{u})$.

Question 7: Exprimer $\vec{V}(Q,3/0)$ en fonction de h et $\dot{\theta}_{30}$

Question 8: Exprimer $\vec{V}(P,3/0)$ en fonction de h, r et $\dot{\theta}_{30}$

Question 9: En exploitant le RSG en Q, déterminer la relation liant $\dot{\theta}_{10}$ et $\dot{\theta}_{30}$

Question 10: En exploitant le RSG en P, déterminer la relation liant $\dot{\theta}_{20}$ et $\dot{\theta}_{30}$

Question 11: En déduire la relation liant $\dot{\theta}_{10}$ et $\dot{\theta}_{20}$ en fonction de R_1 et R_2

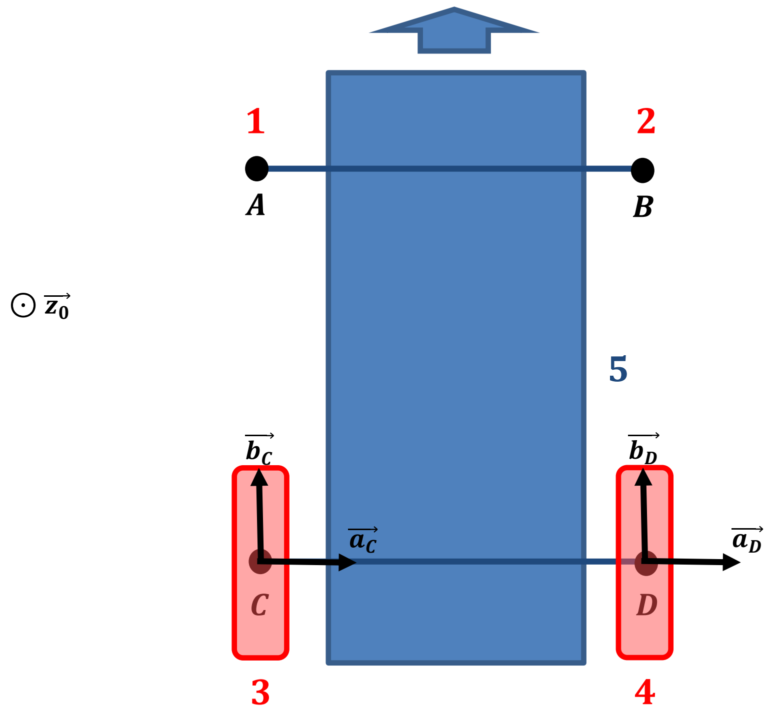
Exercice 4: Déplacement d'une voiture

Soit une voiture en virage à rayon constant. Cette voiture se comporte comme un solide en rotation autour d'un axe vertical passant par un point inconnu appelé O plus ou moins éloigné de la route dans l'intérieur du virage. Sur les véhicules classiques, les roues arrières ne tournent pas.

Notre objectif est de déterminer, lorsque les roues roulent sans glisser sur le sol :

1- Le lieu géométrique du point O connaissant l'orientation fixe des roues arrières
2- La direction des roues avant connaissant la position du centre de rotation O
3- Les vitesses de rotation des 4 roues en virage connaissant le mouvement du véhicule

On propose le modèle suivant :



On appelle 1, 2, 3 et 4 les 4 roues du véhicule. On appelle A, B, C et D les centres des roues sur leurs axes de rotation. On supposera que les pneus sont indéformables et que leur contact avec le sol se réalise sur une ligne. Nous ne nous intéresserons toutefois qu'au centre de chaque ligne à l'aplomb des points A, B, C et D. On appelle A', B', C' et D' ces points de contact de chaque roue avec le sol.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = -r\vec{z_0}$$

On définit le vecteur rotation de la voiture 5 par rapport au sol 0 : $\overrightarrow{\Omega_{50}} = \omega\vec{z_0}$

On définit les vecteurs rotation de chaque roue par rapport au véhicule (volant fixe) :

$$\overrightarrow{\Omega_{15}} = \omega_{15}\vec{a_A} \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega_{25}} = \omega_{25}\vec{a_B} \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega_{35}} = \omega_{35}\vec{a_C} \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega_{45}} = \omega_{45}\vec{a_D}$$

Avec $\vec{a_A}$, $\vec{a_B}$, $\vec{a_C}$ et $\vec{a_D}$ des vecteurs unitaires. On se place dans la configuration classique où les roues tournent autour d'axes horizontaux. On a donc $\vec{a_A}$, $\vec{a_B}$, $\vec{a_C}$ et $\vec{a_D}$ dans le plan horizontal.

On définit les vecteurs unitaires dans le plan horizontal $\overrightarrow{b_A}$, $\overrightarrow{b_B}$, $\overrightarrow{b_C}$ et $\overrightarrow{b_D}$ correspondant à la direction de chaque roue. On a donc :

$$\overrightarrow{a_A} \perp \overrightarrow{b_A} \quad ; \quad \overrightarrow{a_B} \perp \overrightarrow{b_B} \quad ; \quad \overrightarrow{a_C} \perp \overrightarrow{b_C} \quad ; \quad \overrightarrow{a_D} \perp \overrightarrow{b_D}$$

$$\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{b_A} \quad ; \quad \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{b_B} \quad ; \quad \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{b_C} \quad ; \quad \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{a_D} = \overrightarrow{b_D}$$

Ou encore, $(\overrightarrow{a_A}, \overrightarrow{b_A}, \overrightarrow{z_0})$, $(\overrightarrow{a_B}, \overrightarrow{b_B}, \overrightarrow{z_0})$, $(\overrightarrow{a_C}, \overrightarrow{b_C}, \overrightarrow{z_0})$ et $(\overrightarrow{a_D}, \overrightarrow{b_D}, \overrightarrow{z_0})$ sont des bases orthonormées directes

On sait que les roues arrière sont parallèles :

$$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_D} \quad ; \quad \overrightarrow{b_C} = \overrightarrow{b_D}$$

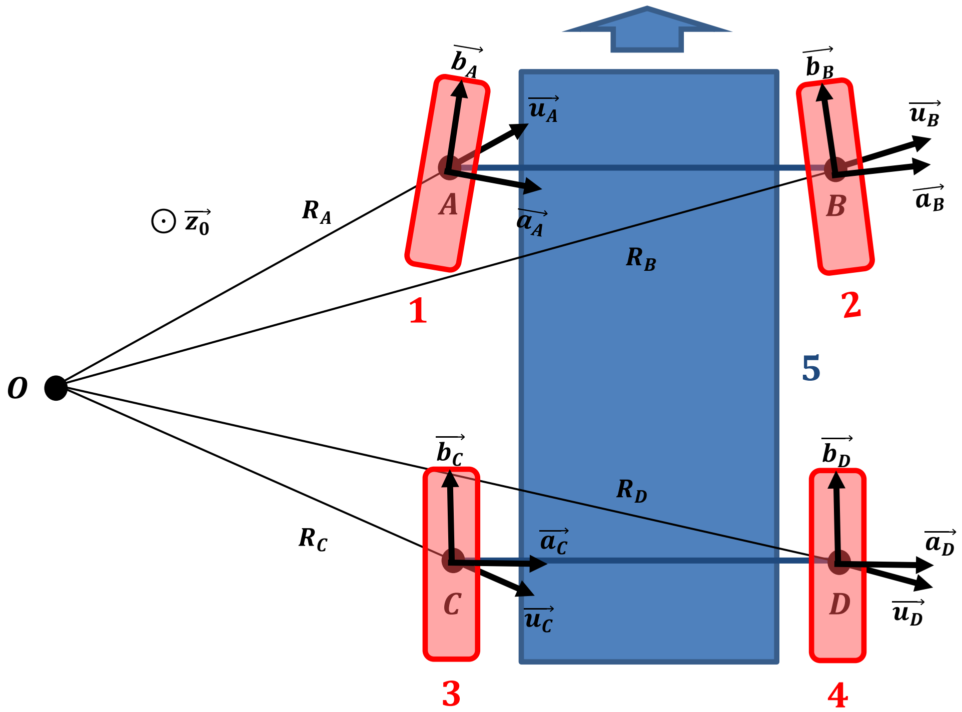
On définit les vecteurs $\overrightarrow{u_A}$, $\overrightarrow{u_B}$, $\overrightarrow{u_C}$ et $\overrightarrow{u_D}$ unitaires dont les directions sont pour le moment inconnues tels que :

$$\overrightarrow{OA} = R_A \overrightarrow{u_A} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = R_B \overrightarrow{u_B} \quad ; \quad \overrightarrow{OC} = R_C \overrightarrow{u_C} \quad ; \quad \overrightarrow{OD} = R_D \overrightarrow{u_D}$$

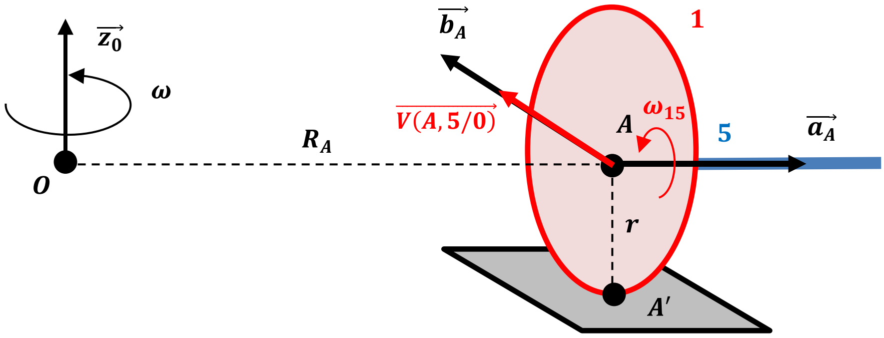
On ne peut donc pas à priori dire que les vecteurs $\overrightarrow{u_A}$, $\overrightarrow{u_B}$, $\overrightarrow{u_C}$ et $\overrightarrow{u_D}$ sont respectivement orthogonaux aux vecteurs $\overrightarrow{b_A}$, $\overrightarrow{b_B}$, $\overrightarrow{b_C}$ et $\overrightarrow{b_D}$. On va chercher à le démontrer.

On suppose qu'il y a roulement sans glissement aux contacts de toutes les roues avec le sol.

Pour concrétiser les données, en imaginant une situation illusoire où le point O et les directions des roues sont placés aléatoirement, on aurait :



L'étude que nous allons mener consiste à exploiter le fait que le mouvement du centre de chaque roue peut être exprimé en exploitant soit le mouvement de la voiture par rapport au sol, soit le mouvement de la roue par rapport au sol. On propose le schéma suivant pour l'illustrer sur la roue 1 :



On va montrer que la vitesse $\overrightarrow{V(A,5/0)}$ en passant par le mouvement de la voiture 5 par rapport au sol 0 est la même vitesse que la vitesse $\overrightarrow{V(A,5/0)}$ en passant par la vitesse du point de contact en A'. En supposant le roulement sans glissement en A', on montrera des résultats intéressants.

Cahier des charges

Le véhicule étudié doit pouvoir effectuer des virages de rayon minimum :

$$R_{min} = 5\ m$$

Le système « crémaillère – Biellettes de direction » permet de faire varier l'orientation de chaque roue par rapport à la direction du véhicule dans un intervalle $[-45°; +45°]$

Les roues doivent pouvoir avoir des vitesses de rotation différentes.

Position du centre de rotation $5/0$

Dans cette partie, compte tenu de l'orientation imposée des roues arrière, nous souhaitons déterminer les directions de $\overrightarrow{u_C}$ et $\overrightarrow{u_D}$ dans le but de déterminer le lieu du centre de rotation O de la voiture par rapport au sol imposé par la condition de roulement sans glissement aux contacts roues/sol.

Question 1: Exprimer les conditions de roulement sans glissement en C' et D'

Question 2: Montrer que $\vec{V}(C',5/0) = \vec{V}(C,5/0)$ et $\vec{V}(D',5/0) = \vec{V}(D,5/0)$

Question 3: En exploitant les relations précédentes, exprimer $\vec{V}(C,5/0)$ en fonction de r, ω_{35} et $\overrightarrow{b_C}$ et $\vec{V}(D,5/0)$ en fonction de r et ω_{45} et $\overrightarrow{b_D}$

Question 4: Exprimer $\vec{V}(C,5/0)$ en fonction de R_C, ω et $\overrightarrow{u_C} \wedge \overrightarrow{z_0}$ et $\vec{V}(D,5/0)$ en fonction de R_D, ω et $\overrightarrow{u_D} \wedge \overrightarrow{z_0}$

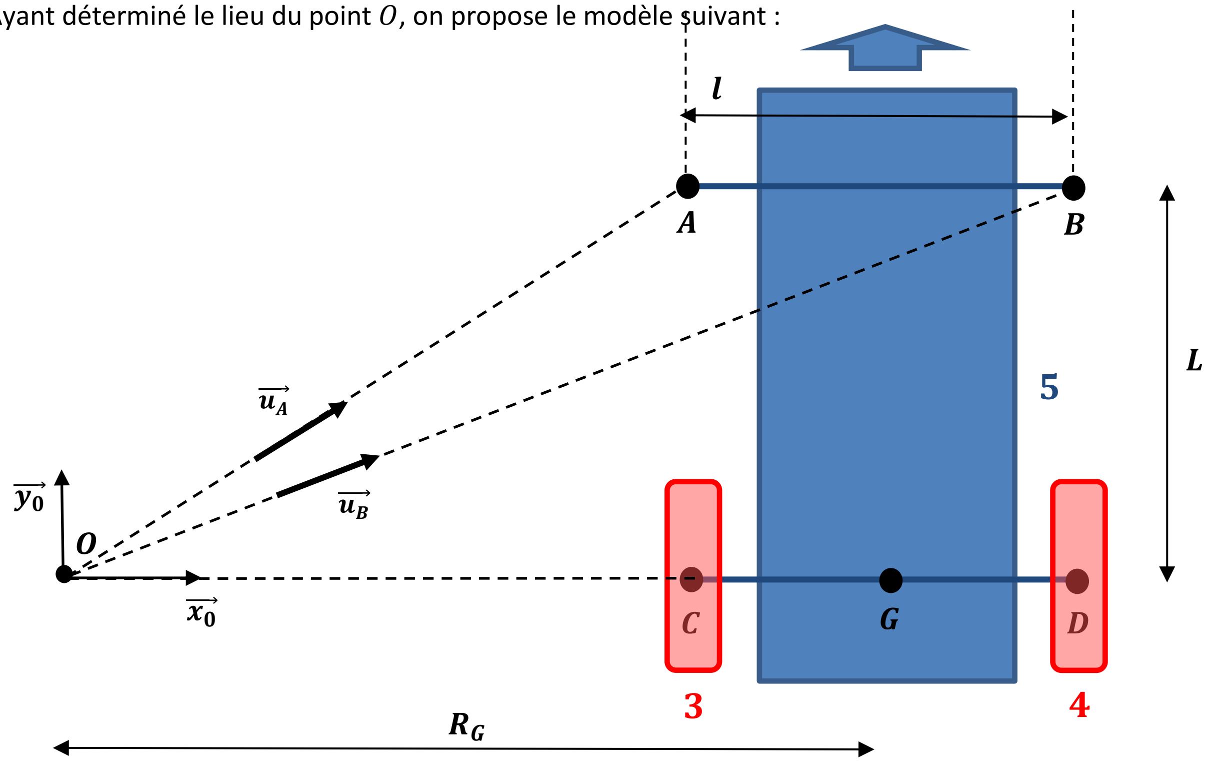
Question 5: En déduire que $\overrightarrow{u_C} \perp \overrightarrow{b_C}$ et $\overrightarrow{u_D} \perp \overrightarrow{b_D}$

Question 6: En déduire que $\overrightarrow{u_C} = \pm \overrightarrow{u_D}$

Question 7: En déduire que le centre de rotation du mouvement de $5/0$ est sur la droite CD

Directions des roues avant

Ayant déterminé le lieu du point O, on propose le modèle suivant :



On définit le point G comme le point où l'on peut exprimer la vitesse du véhicule : $V_G = \left\|\vec{V}(G,5/O)\right\|$ ainsi que le rayon du virage R_G.

On donne :

$$l = 1{,}344\ m \quad ; \quad L = 2{,}347\ m$$

$$(Dimensions\ DAE)$$

Montrons que la condition de roulement sans glissement des roues avant impose que $\overrightarrow{b_A} \perp \overrightarrow{u_A}$ et $\overrightarrow{b_B} \perp \overrightarrow{u_B}$

Question 8: Exprimer les conditions de roulement sans glissement en A' et B'

Question 9: Montrer que $\vec{V}(A',5/0) = \vec{V}(A,5/0)$ et $\vec{V}(B',5/0) = \vec{V}(B,5/0)$

Question 10: En exploitant les relations précédentes, exprimer $\vec{V}(A,5/0)$ en fonction de r, ω_{15} et $\overrightarrow{b_A}$ et $\vec{V}(B,5/0)$ en fonction de r et ω_{25} et $\overrightarrow{b_B}$

Question 11: Exprimer $\vec{V}(A,5/0)$ en fonction de R_A, ω et $\overrightarrow{u_A} \wedge \overrightarrow{z_0}$ et $\vec{V}(B,5/0)$ en fonction de R_B, ω et $\overrightarrow{u_B} \wedge \overrightarrow{z_0}$

Question 12: En déduire que $\overrightarrow{b_A} \perp \overrightarrow{u_A}$ et $\overrightarrow{b_B} \perp \overrightarrow{u_B}$

Question 13: Dessiner les roues avant en A et B en respectant leurs directions respectives. On placera les angles α_A et α_B correspondant à l'angle d'orientation des roues par rapport à la direction de la voiture

Question 14: Quel type de roues permet « d'absorber » la composante de glissement lorsque les directions ne sont pas respectées

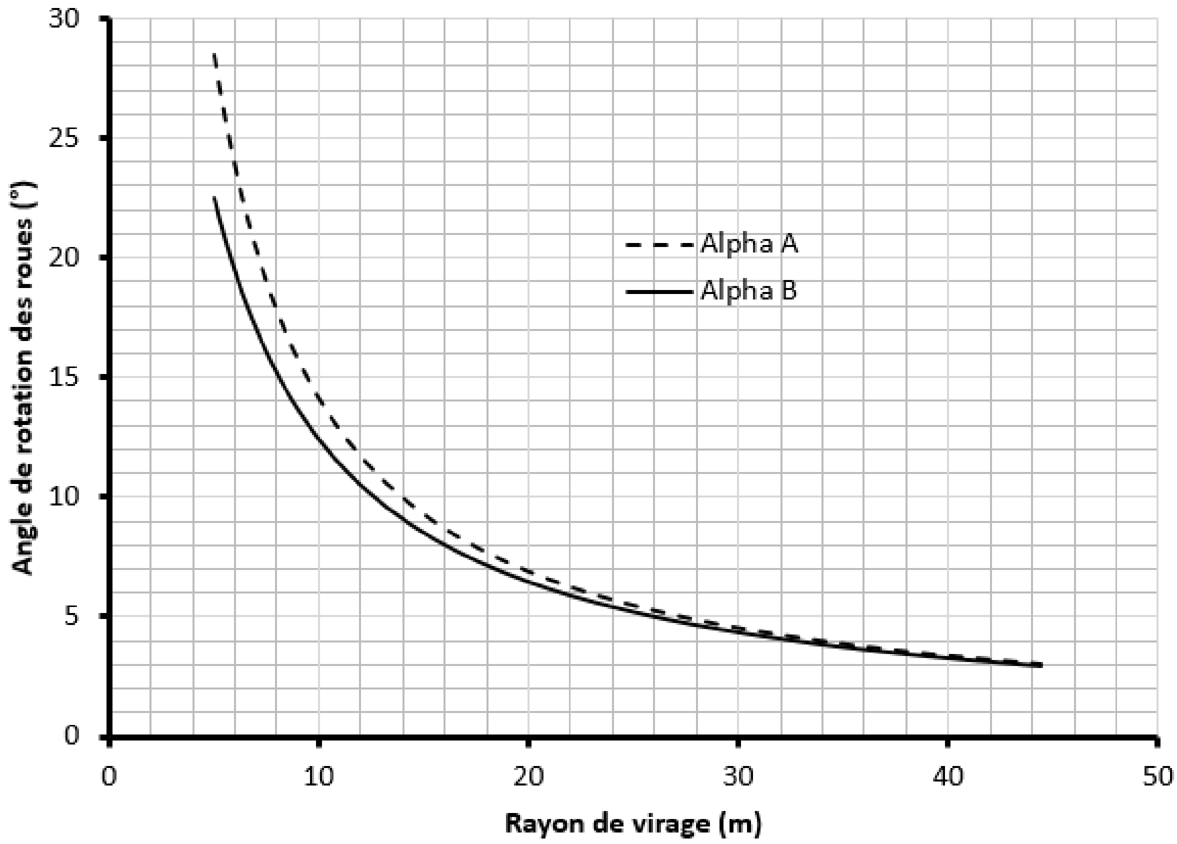
Question 15: Déterminer l'expression des angles α_A et α_B en fonction de L, l et R_G

Question 16: Donner l'expression de α_A et α_B pour que le véhicule ait un rayon de virage minimum R_{min} en fonction de R_{min}, l et L

Question 17: Valider le critère de rayon de virage minimum précisé dans le cahier des charges

Question 18: Combien vaut l'écart Δ_α^{max} entre la rotation des deux roues avant

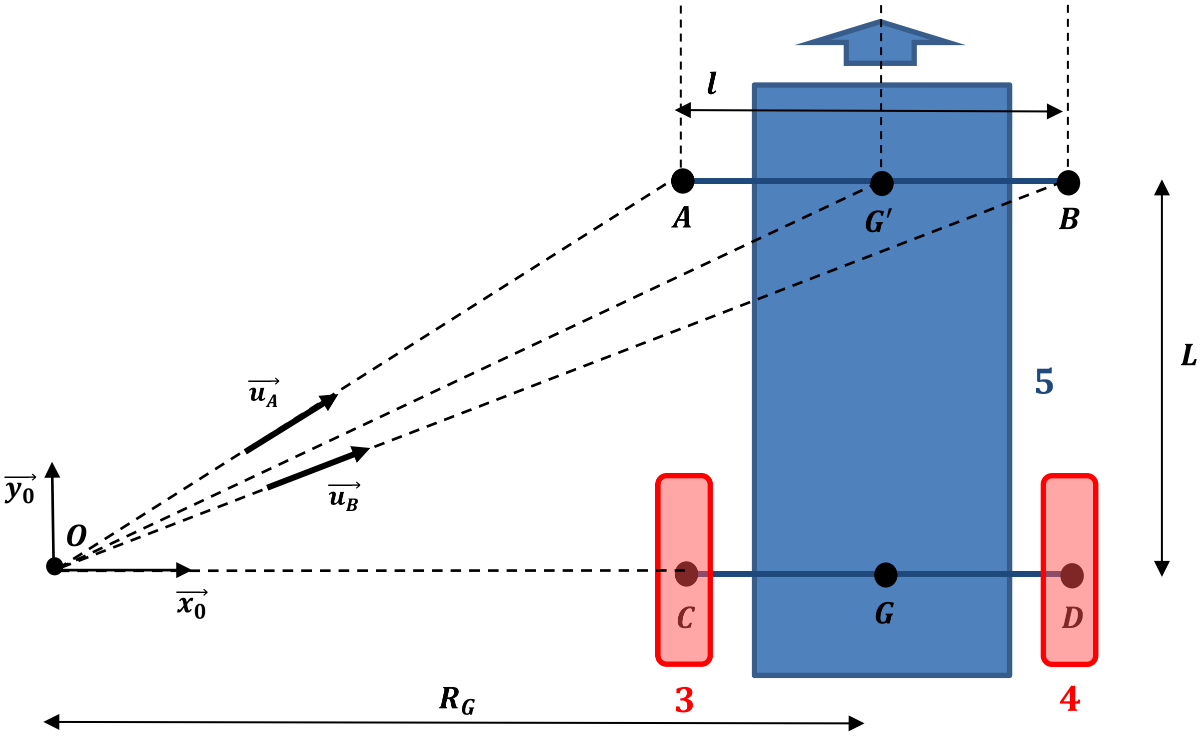
On propose la courbe de la rotation des roues avant en fonction du rayon de virage pour une rotation vers la gauche :



Cette courbe présente une asymptote horizontale. En effet, la ligne droite correspond à un rayon de virage infini. La rotation du volant n'est donc pas proportionnelle au rayon de virage souhaité. Dès les premiers degrés de rotation de celui-ci, le rayon du virage diminue pour s'approcher d'une valeur de quelques dizaines de mètres.

On souhaite donc déterminer la relation qui est imposée aux roues en fonction du paramètre piloté par le volant, c'est-à-dire l'orientation du mouvement de la voiture.

On introduit le point G' au centre du segment $[AB]$ entre les 2 roues avant. On souhaite définir un paramètre qui représente l'orientation du véhicule et qui soit symétrique, c'est-à-dire qui soit identique pour un même rayon de virage vers la droite ou vers la gauche. Il faut donc définir un angle quelque part sur une droite (GG'). Le choix est fait de définir l'angle en G'. On définit donc l'angle α caractérisant la direction de ce point dans le mouvement de la voiture 5 par rapport au sol 0 :

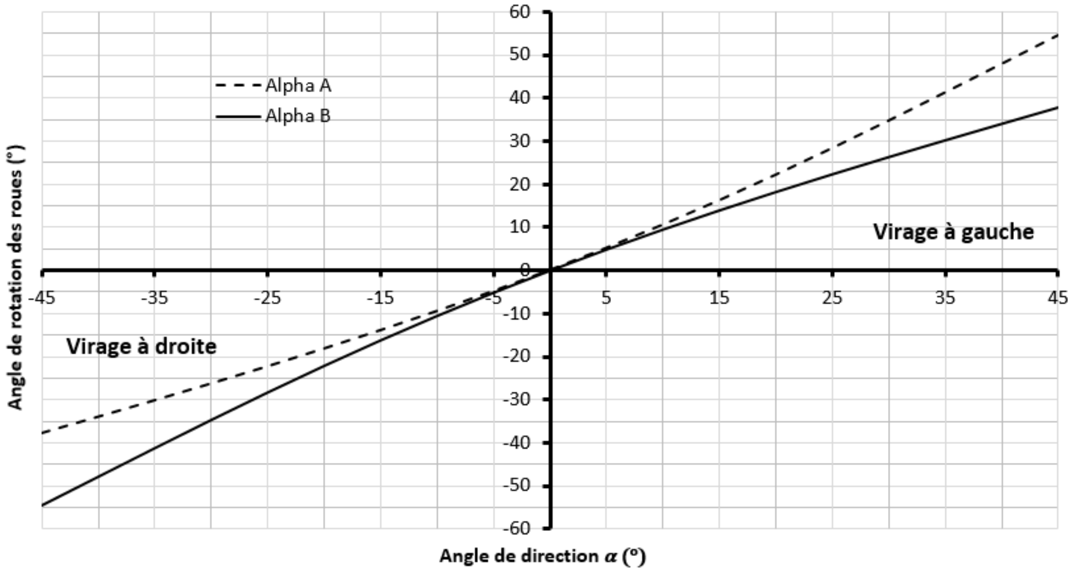


Question 19: Placer l'angle α sur le schéma proposé

Question 20: Donner l'expression de α en fonction de R_G et L

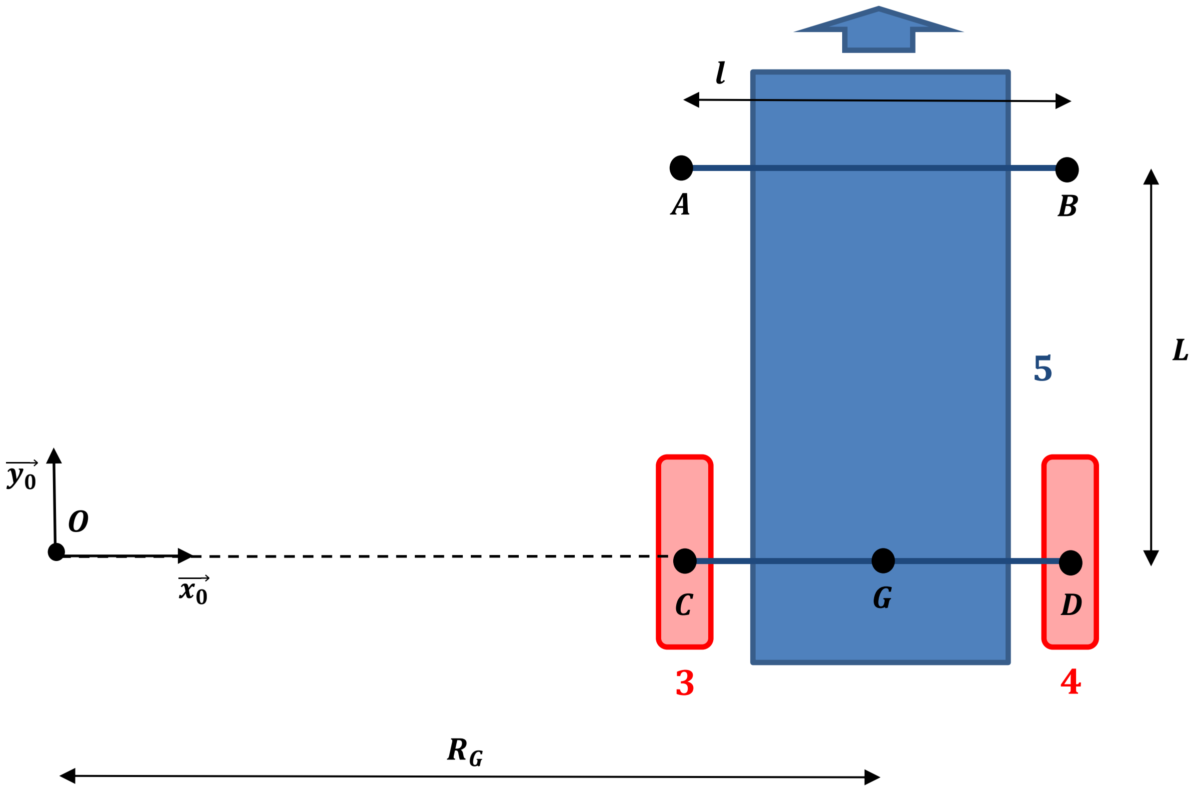
Question 21: En déduire l'expression α_A et α_B en fonction de α, l et L

On propose ci-dessous la courbe de l'évolution des angles α_A et α_B en fonction de l'orientation α imposée par le volant :



Question 22: Décrire les solutions techniques permettant d'obtenir cette orientation particulière des deux roues avant

Calcul des vitesses de rotation des roues



On donne les conditions suivantes :

$$\vec{V}(G,5/0) = V_G\vec{u} \quad ; \quad \|\vec{u}\| = 1$$
$$\|\vec{V}(G,5/0)\| = V_G = 130\ km.h^{-1}$$

La voiture est en virage vers la gauche sur l'autoroute à un taux de rotation de 90° en 10 secondes

Le rayon des pneus vaut :

$$r = 295{,}5\ mm$$

Question 23: Déterminer la valeur numérique de R_G
Question 24: En déduire les valeurs numériques de R_C et R_D
Question 25: Calculer les valeurs numériques de R_A et R_B
Question 26: Déterminer les valeurs numériques des vitesses des centres de chaque roue V_A, V_B, V_C et V_D avec 3 décimales
Question 27: En déduire les valeurs numériques des vitesses de rotation des 4 roues par rapport à la voiture ω_{15}, ω_{25}, ω_{35} et ω_{45}
Question 28: Quelle roue va le plus vite ?
Question 29: Quelle roue va le moins vite ?
Question 30: Décrire les solutions techniques permettant d'avoir une vitesse de rotation différente pour chaque roue